Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 13.10.2014.

Euklidske geometrije II, pismeni ispit, (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

Zadatak br. 1

(30%)(a) Date su tri duži u prostoru MA, MB i MC; od kojih je svaka okomita na druge dvije. Ako sa x, y i z redom označimo dužine ovih duži, pokazati da zapremina tetraedra $ABCM$ iznosi $\frac{1}{6}xyz$.

(70%)(a) Ako je površina omotača prave kružne kupe jednaka $\frac{1}{4}$ površini kruga čiji je poluprečnik jednak izvodnici (generatrisi) te iste kupe, pokazati da je odnos između zapremine kupe i zapremine sfere, koja prolazi kroz vrh i bazu (krug) kupe, iznosi $\frac{225}{2048}$.
(Mala pomoć: Ako sa ℓ označimo izvodnicu kupe, sa r poluprečnik baze kupe, sa h visinu kupe, i sa R poluprečnik sfere, prisjetimo se da je $P_{omotaca\_kupe} = \pi r\ell$, $V_{kupe} = \frac{1}{3}r^2\pi h$, $V_{sfere} = \frac{4}{3}R^3\pi$).

Zadatak br. 2

(30%)(a) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2}+1 = \dfrac{\sqrt{3a}-a^2}{\sqrt{b}}$, gdje je $a < 1 < b$.

(70%)(b) Na osnovici datog jednakokrakog trougla konstruisati tačku čija je razlika rastojanja od krakova trougla jednaka datoj duži. (Detaljno sprovesti sve četri koraka: Analizu, Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju.)

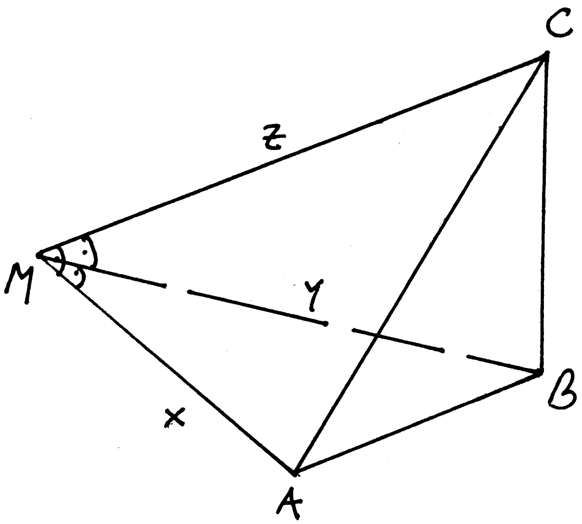
Zadatak br. 3

(40%)(a) Neka su dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q, a k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1, O_3)$ date su tačke M i N takve da $M \in k_1$, $N \in k_3$ i važi poredak $M - O_1 - O_3 - N$. Neka je $\{T\} = p(O_1, O_3) \cap p(P, Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

(60%)(b) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i data je prava t. Konstrisati krug k koji dodiruje datu pravu i dva data kruga. (Detaljno sprovesti samo Analizu (analizu uraditi na taj način da se u tekstu ne pozivate na neki raniji Apolonijev problem). Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

(#) Date su tri duži u prostoru MA, MB i MC i od kojih je svaka okomita na druge dvije. Ako sa x, y i z redom označimo dužine ovih duži pokazati da zapremina tetraedra MABC iznosi $\frac{1}{6}xyz$.

Rj.



Zapremina tetraedra se računa po formuli $\frac{1}{3}B \cdot H$

Pa neka je ΔMAB baza.

$$P_{\Delta ABM} = \frac{MA \cdot MB}{2} = \frac{x \cdot y}{2}$$

Primjetimo da je $CM \perp MA$ i $CM \perp MB$

$$V_{tetraedra} = \frac{1}{3} MC \cdot P_{\Delta MAB} = \frac{1}{6} MA \cdot MB \cdot MC = \frac{1}{6} xyz.$$

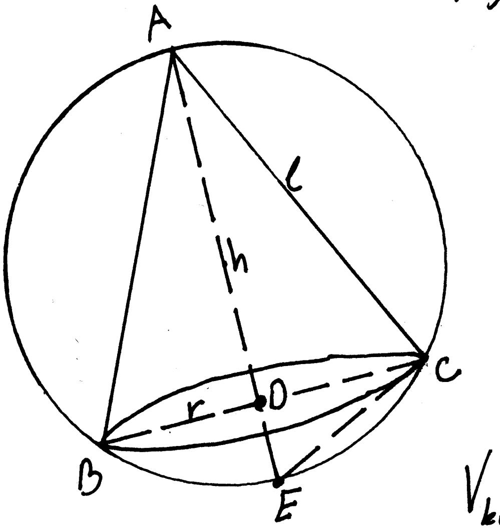
(#) Ako je površina omotača prave kružne kupe jednaka $\frac{1}{4}$ površini kruga čiji je poluprečnik jednak izvodnici (generatrisi) te iste kupe, pokazati da je odnos između zapremine kupe i zapremine sfere, koja prolazi kroz vrh i bazu (krug) kupe, iznosi $\frac{225}{2048}$.

Rj. $P_{omotača\_kupe} = \pi r l$, gdje je l izvodnica kupe,
r poluprečnik baze (kruga) kupe,
h visina kupe

$P_{baze\_kupe} = r^2\pi$

$V_{kupe} = \frac{1}{3} r^2 \pi h$, $V_{sfere} = \frac{4}{3} R^3 \pi$

Neka je ABC prava kružna kupa sa vrhom A i BC kao prečnikom baze. Neka je AD visina kupe i neka $p(A,D)$ siječe sferu u tački E. Spojimo CD i CE (vidi sliku).



Uvedimo oznake $AD=h$, $AB=l$, $BD=r$, $BC=2r$, poluprečnik (radijus) sfere $=R$.

$P_{omotača\_kupe} = \pi r l \overset{\text{prema pretp.}}{=} \frac{1}{4}\pi l^2 \Rightarrow l = 4r$

$AD \perp$ bazu $\odot \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow AD \perp CD$

$AC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow l^2 = h^2 + r^2 \overset{l=4r}{\Longrightarrow} h = r\sqrt{15}$

$V_{kupe} = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} r^3 \sqrt{15}$

Kako je AE prečnik (diametar) sfere $\Rightarrow \angle ACE = 90°$

$CD \perp AE$, $\triangle ADC \sim \triangle AEC$

$\Downarrow$

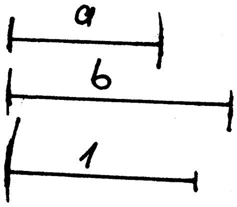
$l^2 = AD \cdot AE \Rightarrow AE = \frac{l^2}{h} = \frac{16r}{\sqrt{15}} \Rightarrow R = \frac{8r}{\sqrt{15}}$

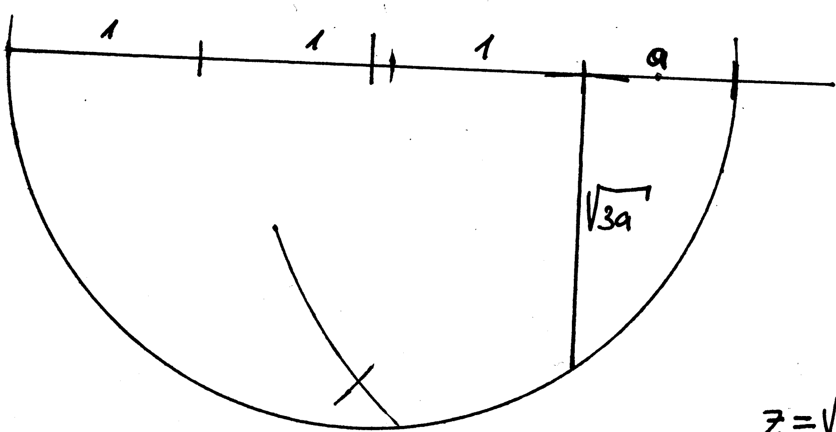
$V_{sfere} = \frac{4}{3}\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{512 r^3}{15\sqrt{15}} = \frac{2048 \pi r^3}{45\sqrt{15}} \Rightarrow \frac{V_{kupe}}{V_{sfere}} = \frac{\frac{\pi}{3} r^3 \sqrt{15}}{\frac{2048}{45\sqrt{15}}\pi r^3} = \frac{225}{2048}$

(#) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{2}+1 = \frac{\sqrt{3a}-a^2}{\sqrt{b}}, \quad a<1<b.$$

Rj.



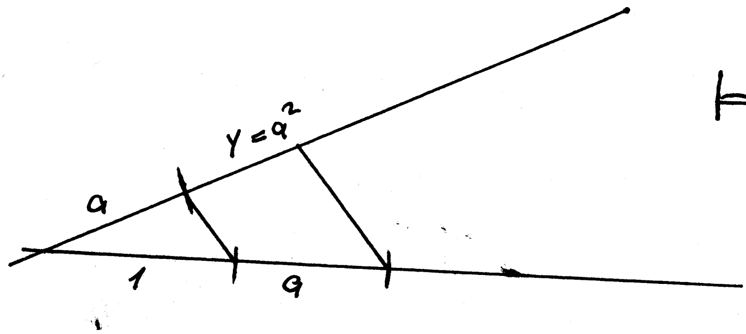


$Y=a^2$

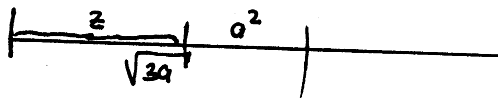
$Y=a\cdot a$

$\frac{Y}{a}=\frac{a}{1}$

$\frac{1}{a}=\frac{a}{Y}$

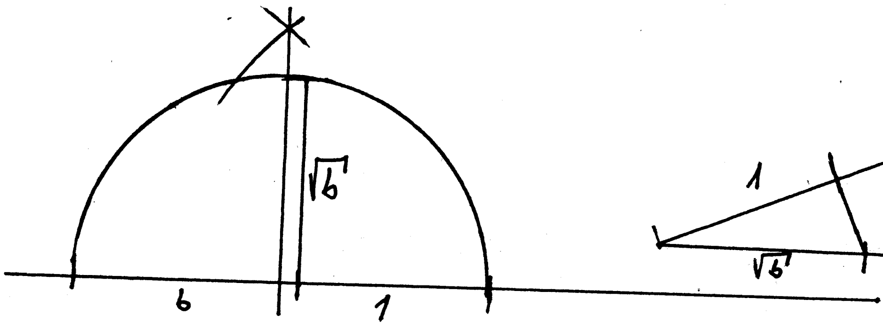


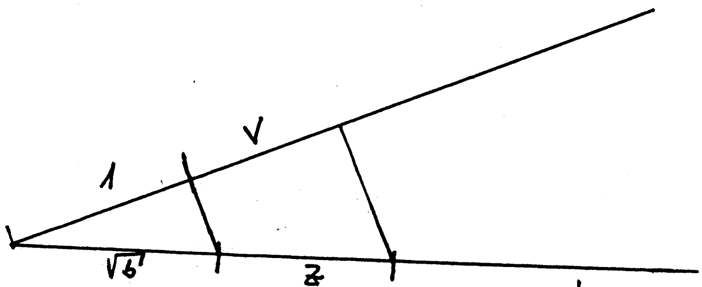
$z=\sqrt{3a}-a^2$



$V=\frac{z}{\sqrt{b}}$

$\frac{\sqrt{b}}{z}=\frac{1}{V}$



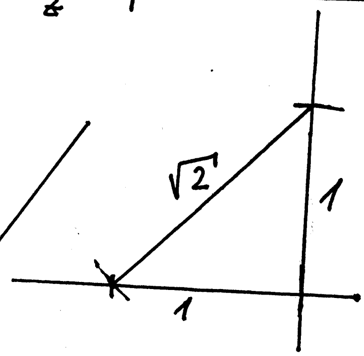


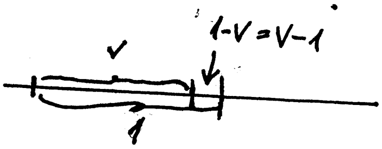
Sad imamo $x\sqrt{2}+1=V$

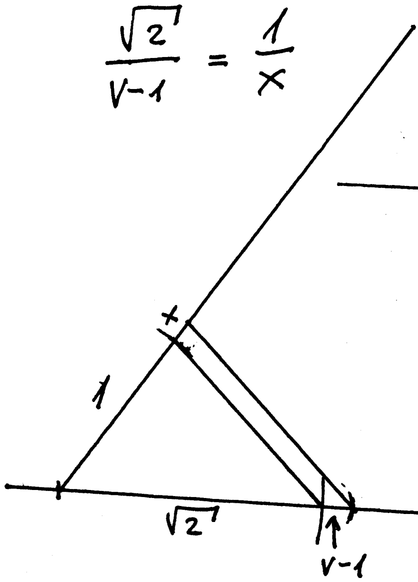
$x\sqrt{2}=V-1$

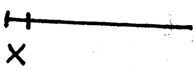
$x=\frac{V-1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{V-1}=\frac{1}{x}$



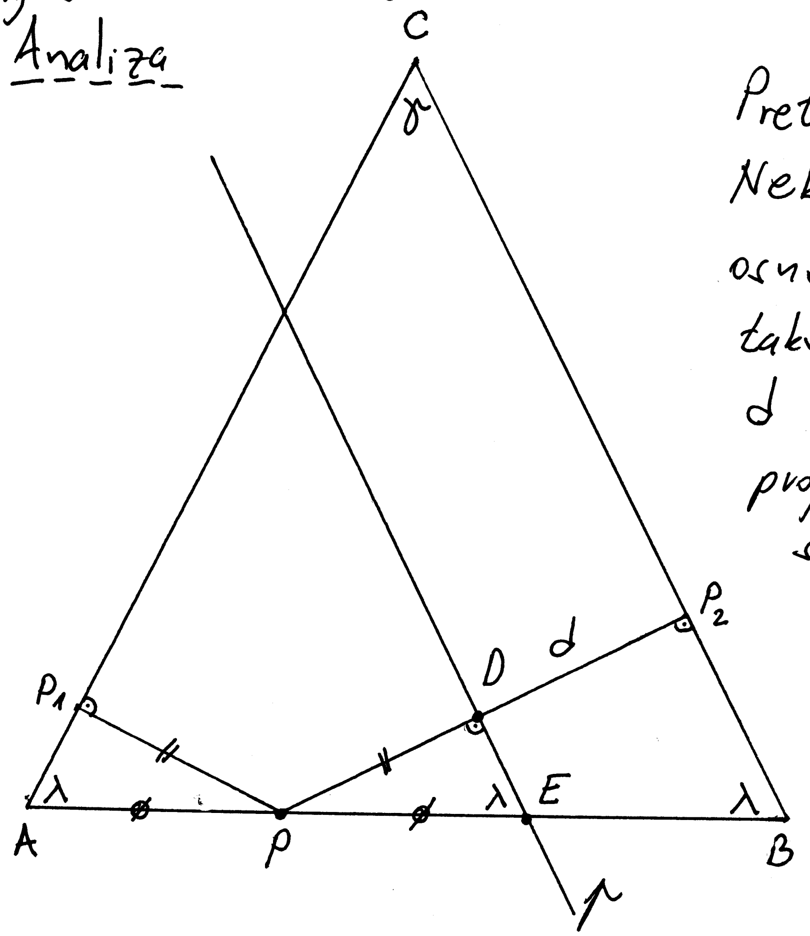






(#) Na osnovici datog jednakokrakog trougla konstruisati tačku čija je razlika rastojanja od krakova trougla jednaka datoj duži.

Rj: Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je P tražena tačka na osnovici AB datog jkk ΔABC takva da je $PP_1 - PP_2 = d$ gdje je d data duž, a P_1 i P_2 su ortog. projekcije tačke P redom na stranice AC i BC.

Na duži PP_2 izaberimo tačku D t.d. $PP_1 \cong PD$, i kroz tačku D postavimo pravu $p \parallel p(B,C)$.

$p \parallel p(B,C)$ i $p(A,B)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle PED \cong \sphericalangle PBC$

$$\left.\begin{array}{r} \sphericalangle PAP_1 \cong \sphericalangle PED = \lambda \\ \sphericalangle PP_1A \cong \sphericalangle EDP = 90^\circ \\ PP_1 \cong PD \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta APP_1 \cong \Delta PED$$

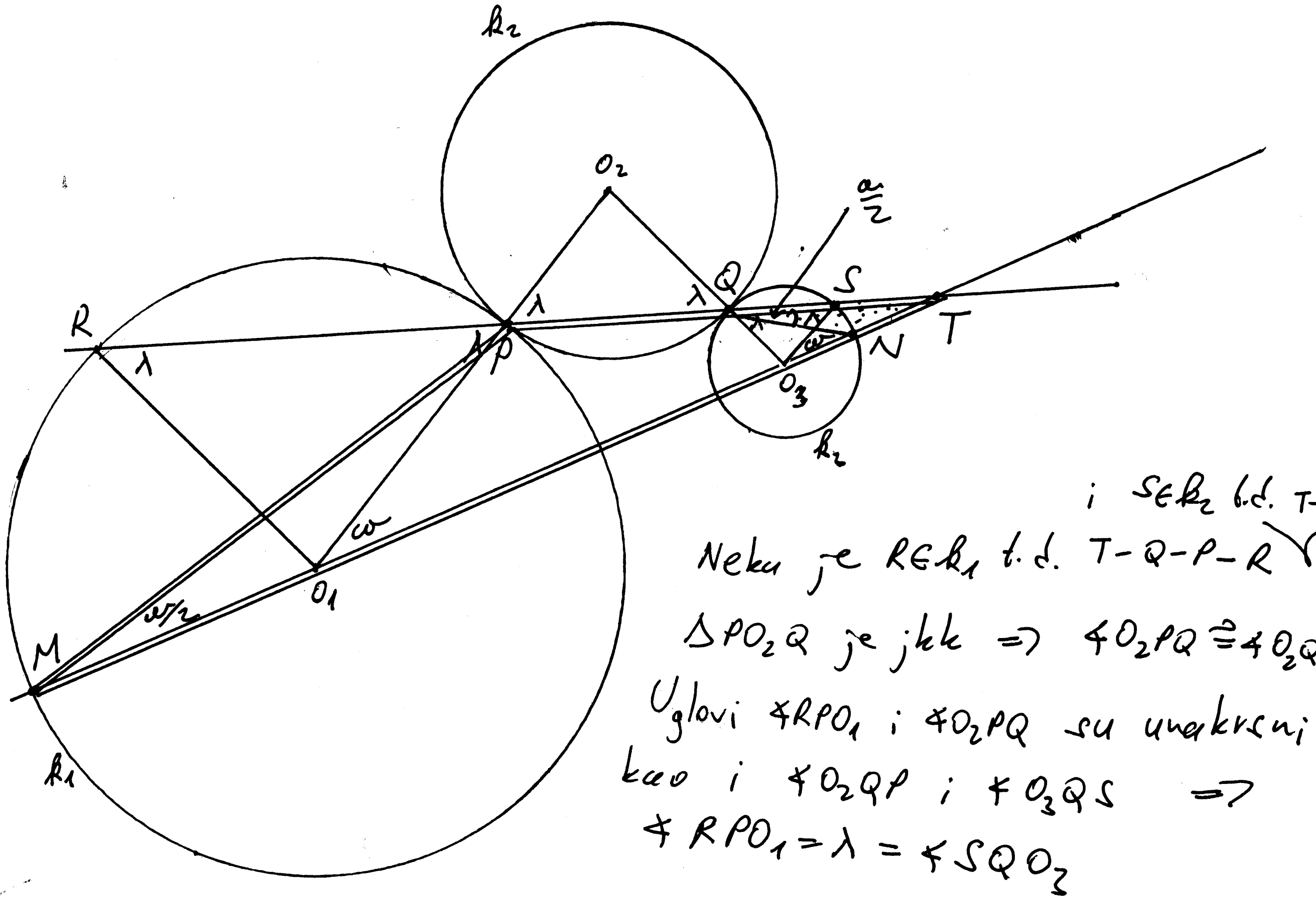
$$\Downarrow$$

$$AP \cong PE$$

Kako je dat ΔABC i dužina d, to pravu p možemo konstruisati (prava p se nalazi na rastojanju d od stranice BC). Poslije toga ćemo dobiti tačku E, pa nije teško konstruisati sredinu P duži AE.

(#) Neka su dati krugovi $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$ takvi da k_1 dodiruje krug k_2 u tački P, k_2 dodiruje krug k_3 u tački Q i k_1 i k_3 nemaju zajedničkih tački. Na pravoj $p(O_1, O_2)$ date su tačke M i N takve da $M \in k_1$, $N \in k_3$ i važi poredak $M - O_1 - O_2 - N$. Neka je $\{T\} = p(O_1, O_2) \cap p(P, Q)$. Dokazati da su trouglovi $\triangle TNQ$ i $\triangle TPM$ slični.

Rj.



i $S \in k_2$ t.d. $T-S-Q$

Neka je $R \in k_1$ t.d. $T-Q-P-R$

$\triangle PO_2Q$ je jkk $\Rightarrow \angle O_2PQ \cong \angle O_2QP = \lambda$.

Uglovi $\angle RPO_1$ i $\angle O_2PQ$ su unakrsni kao i $\angle O_2QP$ i $\angle O_3QS$ $\Rightarrow$

$\angle RPO_1 = \lambda = \angle SQO_3$

Kako su $\triangle PO_1R$ i $\triangle SO_3Q$ jkk $\Rightarrow \angle PRO_1 = \lambda$ i $\angle QSO_3 = \lambda$

Ako posmatramo $p(S, R)$ i primjetimo da je $\angle RSO_3 \cong \angle RPO_1 = \lambda$

$\Rightarrow PO_1 \parallel SO_3$

$PO_1 \parallel SO_3$ i $p(M, N)$ transferzala $\Rightarrow \angle SO_3T \cong \angle PO_1T = \omega$.

Ovo su dva centralna ugla nad lukom kojima odgovaraju periferijski $\angle O_1MP$ i $\angle NQS$. Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} \angle QTN \cong \angle MTQ \text{ (zajednički ugao)} \\ \angle TQN \cong \angle TMP = \frac{\omega}{2} \\ \angle TNQ \cong \angle TPM \text{ (treći ugao)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(slič UUU)}} \triangle TNQ \sim \triangle TPM$$

q.e.d.